modélisation de l'évolution du véhicule sur circuit

La force propulsive F_p générée à la roue propulsive du véhicule sert à vaincre les frottements mécaniques des roues, les frottements aérodynamiques, les forces de gravité et les forces d'inertie, linéaire et de rotation.

$$F_p * all = a \times m \times g \times \cos\alpha + a' \times m \times \frac{v^2}{\Re} + \frac{1}{2}\rho \times S \times C_x \times v^2 + m \times g \times \sin\alpha + (m + m_i)\frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\left[F_p * all - m \times g \times (a \times \cos\alpha + \sin\alpha)\right] - \left(\frac{a' \times m}{\Re} + \frac{1}{2}\rho \times S \times C_x\right) \times v^2}{(m + m_i)} = A - Bv^2 \qquad (2)$$

$$dx = v \times dt = \frac{v \times dv}{A - B \times v^2} = \frac{dv^2}{2(A - B \times v^2)} = \frac{du}{2B(\frac{A}{B} - u)} \qquad (3)$$

où:

a constante de frottement mécanique axial rapportée au poids du véhicule (0,003).
m la masse du véhicule (=100kg)
a' constante de frottement mécanique latéral (en virage) rapportée au poids du véhicule (négligée ici).
m_i masse équivalente aux inerties de rotation (négligée ici)
ρ masse volumique de l'air (1,2kg/m3)
S surface du maître-couple du véhicule (0,38m2)
Cx coefficient de traînée (0,15)
v vitesse instantanée du véhicule (il peut être nécessaire pour le calcul de la résistance aérodynamique de lui adjoindre la valeur algébrique de la composante du vent)
α angle représentatif de la pente de la chaussée
R rayon des roues (0,25m)
$\Re$ rayon de giration du véhicule
F_p force propulsive (fonction de la vitesse de rotation du moteur N_m et de l'ouverture des gaz α_{gaz})

$$F_p = \frac{C_m \times \eta_t}{r \times R} \qquad (C_m \approx 2\text{Nm})$$

all symbole d'allumage (0 moteur éteint, 1 moteur allumé)
C_m couple moteur
η_t rendement de transmission
r rapport de démultiplication (= nombre de dents du pignon/nombre de dents de la couronne)

Remarque : en descente en roue libre, A est en général positif car $(a \times \cos\alpha + \sin\alpha) < 0$

On considère des portions de circuit (entre les abscisses x_i et x_{i+1} avec une vitesse initiale v_i à l'instant t_i) sur lesquelles *A* et *B* sont quasi constants, la résolution sous forme d'intégrale définie de (2) et (3), donne,

* si *A*<0 :

$$t_{i+1} - t_i = \frac{-1}{\sqrt{|A|B}}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{B}{|A|}}v_{i+1}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{B}{|A|}}v_i\right)\right] = \frac{-1}{B \times v_0}\left[\tan^{-1}\left(\frac{v_{i+1}}{v_0}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{v_i}{v_0}\right)\right] \qquad (2')$$

(où $v_0^2 = |A|/B$)

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = \frac{-1}{2 \times B}\left[\log\left(\frac{|A|}{B} + v_{i+1}^2\right) - \log\left(\frac{|A|}{B} + v_i^2\right)\right] = \frac{-1}{2 \times B}\left[\log\left|1 + \frac{v_{i+1}^2}{v_0^2}\right| - \log\left|1 + \frac{v_i^2}{v_0^2}\right|\right] \qquad (3')$$

connaissant Δx_i et v_i , on déduit v_{i+1} d'après (3') puis, connaissant t_i on déduit t_{i+1} d'après (2')

* si A>0 :

$$t_{i+1} - t_i = \frac{1}{2\sqrt{AB}}\left[\log\left|\frac{\sqrt{\frac{A}{B}}+v_{i+1}}{\sqrt{\frac{A}{B}}-v_{i+1}}\right| - \log\left|\frac{\sqrt{\frac{A}{B}}+v_i}{\sqrt{\frac{A}{B}}-v_i}\right|\right] = \frac{1}{2\times B\times v_0}\left[\log\left|\frac{1+\frac{v_{i+1}}{v_0}}{1-\frac{v_{i+1}}{v_0}}\right| - \log\left|\frac{1+\frac{v_i}{v_0}}{1-\frac{v_i}{v_0}}\right|\right] \quad (2")$$

(où $v_0^2=A/B$)

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = \frac{-1}{2\times B}\left[\log\left|\frac{A}{B} - v_{i+1}^2\right| - \log\left|\frac{A}{B} - v_i^2\right|\right] = \frac{-1}{2\times B}\left[\log\left|1-\frac{v_{i+1}^2}{v_0^2}\right| - \log\left|1-\frac{v_i^2}{v_0^2}\right|\right]$$

(3")

Remarque : la consommation énergétique par unité de distance (moteur allumé) $\Delta E_i/\Delta x_i$ est une fonction de N_m , α_{gaz} , de la démultiplication et du rayon de la roue.

* entre les 2 points extrêmes connus i-1 et i+1 d'un *segment, avec un cycle composé d'une phase d'allumage puis d'une phase de roue libre* et dont on connaît la vitesse initiale v_{i-1} et la vitesse finale v_{i+1}, on trouve la vitesse en fin d'allumage v_i , connaissant *A, A' et B*, par le procédé suivant :

avec *A'* , valeur de *A* dans la phase de décélération, et $v_0'^2$ = |A'|/B, on peut écrire :

$$x_{i+1} - x_i + x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_{i-1} = \frac{-1}{2\times B}\left[\log\left(\frac{v_0'^2+v_{i+1}^2}{v_0'^2+v_i^2}\right) + \log\left(\frac{v_0^2-v_i^2}{v_0^2-v_{i-1}^2}\right)\right]$$

(4)

qui donne

$$\frac{v_0'^2+v_i^2}{v_0^2-v_i^2} = \frac{v_0'^2+v_{i+1}^2}{v_0^2-v_{i-1}^2}\exp[2\times B\times(x_{i+1}-x_{i-1})] = K$$

(4')

et $$v_i = \sqrt{\frac{K\times v_0^2 - v_0'^2}{K+1}} \quad (4")$$

x_i et t_i sont trouvés en injectant v_i dans, respectivement, les équations (3') ou (3") et les équations (2') ou (2")

* entre les 2 points extrêmes i et i+1 d'un *segment de décélération* dont on connaît une des vitesses d'extrémité, on a

$$v_{i+1} = \sqrt{(v_0'^2+v_i^2)\times\exp(-2\times B\times(x_{i+1}-x_i)) - v_0'^2}$$

(5)

et $$t_{i+1} = t_i + \frac{-1}{B\times v_0'}\left[\tan^{-1}\left(\frac{v_{i+1}}{v_0'}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{v_i}{v_0'}\right)\right]$$

(6)

Application au circuit de Colomiers :

il ne s'agit pas ici d'une réelle optimisation puisque la stratégie a été imposée : on fixe une vitesse maximum en bas de descente et une accélération maximum en entrée de virage (plus la courbe est serrée et plus le frottement du aux forces latérales, centrifuge essentiellement, est important d'où l'intérêt de le limiter en limitant l'accélération centrifuge), on impose également la vitesse d'arrivée. Il faut réussir à minimiser la consommation, en km/kWh ou en km/l en jouant avec ces valeurs tout en vérifiant que la vitesse moyenne est supérieure ou égale à 25km/h. Cela nous amène à avoir 4 allumages par tour : en sortie de chacun des ronds-points et en bas de chaque descente.

On remarquera également que, lors des phases d'allumage du moteur, le couple est considéré comme constant.